אלגברה לינארית לפיזיקאים - תרגיל בית 11

1. תזכורת: למדנו שכאשר שתי מטריצות לכסינות מתחלפות, כלומר $AB = BA$ (או לחילופין, **הקומוטטור** שלהן שמוגדר ע"י $[A,B] \equiv AB - BA$ שווה לאפס), אז בהכרח קיים סט של ווקטורים עצמיים שהם משותפים לשתי המטריצות. במקרה זה נגיד שהם ניתנות **ללכסון סימולטני**.
יהיו A, B המטריצות ההרמיטיות (מכיוון שהן ממשיות אז בעצם סימטריות) הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

א. הראו כי $[A,B] = 0$.

ב. מצאו מטריצה מלכסנת P ומטריצה אלכסונית D_A כך ש: $D_A = P^{-1}AP$ (כלומר, לכסנו את A).

ג. מצאו את הע"ע של B מבלי לחשב את הפולינום האופייני שלו. רמז: אנחנו יודעים שהו"ע של A ושל B משותפים, כלומר אתם אמורים בשלב הזה לדעת מה הו"ע אבל לא מה הע"ע העצמיים.

ד. חשבו מפורשות את $P^{-1}BP$ והראו כי היא מטריצה אלכסונית. מה הם האיברים שעל האלכסון שלה?

הערה: המסקנה היא שאם כבר מצאנו ו"ע עבור מטריצה אחת והמטריצות מתחלפות, אז לא צריך להתאמץ ואנחנו כבר יודעים את הו"ע של המטריצה השניה באופן מיידי. מבחינת פיזיקה: בקוונטים אופרטורים הרמיטיים מייצגים גדלים מדידים. אופרטורים מתחלפים הם חשובים במיוחד כי זה אומר שאפשר למדוד אותם ביחד. זה נשמע כרגע מוזר, אבל אחרת אם נמדוד אחד אז אנחנו "נאבד" מידע בקשר לשני (להרחבה אתם מוזמנים לקרוא על עקרון אי הוודאות של הייזנברג).

2. בשאלה הזאת נעשה היכרות עם סוג של מטריצות מאוד שימושי: **מטריצות בלוקים**. יהיו המטריצות A, B מתרגיל 1.

א. נגדיר את מטריצת הבלוקים שמורכבת מבלוק של A ואז מבלוק של B:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

הראו כי $|C| = |A||B|$, כלומר שהדטרמיננטה של C היא פשוט מכפלת הדטרמיננטות של A ושל B.

ב. חשבו את $C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ והראו שהתוצאה היא ווקטור, ששני הרכיבים העליונים שלו הם $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ושני הרכיבים התחתונים שלו הם $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

ג. חשבו את ההופכית של A וההופכית של B, ומצאו בעזרתם את ההופכית של C. רמז: נסו לקחת מטריצת בלוקים שהבלוק הראשון הוא A^{-1} והבלוק השני הוא B^{-1}.

ד. מצאו את הו"ע והע"ע שלה מבלי לחשב את הפולינום האופייני של C.

רמז: תנסו להסתכל על שני "סוגים" של ווקטורים: הראשונים שיש להם איברים שונים מאפס רק בשני הרכיבים העליונים, והשניים שיש להם רכיבים שונים מאפס רק בשני הרכיבים התחתונים. כלומר:

$$\text{type1} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \text{type2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

תנסו לבחור שני ו"ע מהסוג הראשון ושני ו"ע מהסוג השני בעזרת הו"ע שמצאתם בסעיף ב' של שאלה 1.

ה. מצאו מטריצה P הפיכה ומטריצה D אלכסונית כך ש: $D = P^{-1}CP$ (כלומר, לכסנו את C).

הערה: אז בעצם ראינו למה מטריצות בלוקים זה שימושי – הן מחלקות את המרחבים ל"מרחבים קטנים יותר", ואז אפשר לעשות פעולות בקלות יותר: כמו לחשב דטרמיננטה, מטריצה הופכית וע"ע (במקום לעשות את זה על המטריצה הגדולה, אפשר לעשות על כל אחד מהבלוקים בנפרד ואז כבר יודעים את התוצאה).

3. בשאלה הזאת נראה דוגמא ראשונית ל"משפט הפירוק הספקטרלי" שתלמדו שבוע הבא.
הגדרה: מטריצה תקרא **נורמלית** אם $AA^\dagger = A^\dagger A$. טרנספורמציה לינארית תקרא **נורמלית** אם $TT^\dagger = T^\dagger T$.

א. הוכיחו כי מטריות הרמיטיות, אנטי־הרמיטיות, ואוניטריות הן נורמליים (תזכורת: מטריצה **אוניטרית** U היא מטריצה שמקיימת $U^\dagger = U^{-1}$ או באופן שקול $U^\dagger U = I$).

ב. הראו שאם אופרטור T הוא נורמלי, אז מתקיים כי:

$$\langle T(v)|\, T(v)\rangle = \left\langle T^\dagger(v)\middle|\, T^\dagger(v)\right\rangle$$

רמז: זכרו שההגדרה של אופרטור צמוד היא כי: $\langle v|\, T(u)\rangle = \left\langle T^\dagger(v)\middle|\, u\right\rangle$ לכל שני ווקטורים u, v. מכאן ההוכחה מאוד קצרה.

ג. תהי A המטריצה מתרגיל 1. האם היא נורמלית? הסתכלו על שני הו"ע שלה (המתאימים לע"ע שונים), בדקו שהם אורתוגונליים. (באופן כללי, במטריצות נורמליות ו"ע המתאימים לע"ע שונים הם אורתוגונליים).

ד. האם שני הו"ע העצמיים מהסעיף הקודם מהווים בסיס אורתונורמלי? אם לא, הפכו אותם לבסיס אורתונורמלי ע"י נרמול. בנו מטריצה אוניטרית U שהעמודות שלה מורכבות מהו"ע הללו. בדקו מפורשות כי: $U^\dagger U = I$.

ה. הראו כי הביטוי $U^\dagger AU$ הוא הצורה האלכסונית של A. זה נקרא **לכסון אוניטרי** (כי הלכסון מתבצע בעזרת מטריצה אוניטרית).

4. בשאלה הזאת נוכיח בדרך אחרת משפט שראיתם בהרצאה: אם T הרמיטי, אז $\langle u|T(u)\rangle$ הוא גודל ממשי לכל ווקטור u, ועל הדרך נראה כמה תכונות חשובות. לצורך הפשטות נעבוד במרחב במימד 3 (אבל ההכללה למימדים גדולים יותר היא ברורה).
יהי אופרטור T הרמיטי. נניח בנוסף שקיימים לה שלושה ו"ע:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1,\ T(v_2) = \lambda_2 v_2,\ T(v_3) = \lambda_3 v_3$$

כאשר v_1, v_2, v_3 מהווים בסיס אורתונורמלי (ממשפט הפירוק הספקטרלי זה נכון).

א. הראו כי לכל $i = 1, 2, 3$, מתקיים כי:

$$\lambda_i = \langle v_i|\, T(v_i)\rangle$$

ב. יהי u ווקטור כלשהו במרחב. נקח צירוף לינארי שלו כתלות באיברי הבסיס האורתונורמלי: $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ (המקדמים יכולים להיות מרוכבים). הראו כי:

$$||u||^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2$$

(תזכורת: $||u||^2 \equiv \langle u|\, u\rangle$, ועבור מספר מרוכב z מתקיים כי: $|z|^2 = zz^*$). הערה: באופן כללי זה נקרא שוויון פרסבל.

ג. הראו כי:

$$\langle u|\, T(u)\rangle = \lambda_1|\alpha|^2 + \lambda_2|\beta|^2 + \lambda_3|\gamma|^2$$

ד. הסיקו כי $\langle u|\, T(u)\rangle$ הוא מספר ממשי. רמז: הוכחנו בתרגול כי ע"ע של אופרטור הרמיטי הם ממשיים.

הערה: הגודל $\langle u|\, T(u)\rangle$ בהקשר של תורת הקוונטים נקרא "ערך תצפית", מי שמעניין אותו מוזמן לחפש על זה.

5. יהי $B = \{b_1, b_2\}$ בסיס אורתנורמלי כלשהו למרחב מכפלה פנימית V. תהי T טרנספורמציה לינארית, כך שמתקיים:

$$\langle b_1|\, T(b_1)\rangle = 3,\ \langle b_1|\, T(b_2)\rangle = 1$$
$$\langle b_2|\, T(b_1)\rangle = 1,\ \langle b_2|\, T(b_2)\rangle = 3$$

א. מצאו את ווקטורי הקאורדינטות של הווקטורים $T(b_1)$, $T(b_2)$ בבסיס B.

ב. מצאו את המטריצה המייצגת של האופרטור T בבסיס B (כלומר את $[T]_B$), והסבירו מדוע T היא טרנספורמציה הרמיטית.
הערה: בהקשר הזה אני ממליץ לכם גם להסתכל שוב גם הטענה החשובה בשאלה 4 סעיף ז', בתרגיל בית 8.

ג. נגדיר בסיס חדש כתלות בבסיס הישן: $C = \{c_1, c_2\}$ כאשר:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(b_1 + 2b_2\right),\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2b_1 + b_2\right)$$

הראו כי C הוא בסיס אורתונורמלי.

ד. מצאו את המטריצה המייצגת של האופרטור T בבסיס C (כלומר את $[T]_C$). בדקו שגם $[T]_C$ מטריצה הרמיטית.

ה. נסמן את מטריצת המעבר בין הבסיס C לבסיס B כ:U (כלומר: $U = M_B^C$). מצאו את U, והראו מפורשות כי היא מטריצה אוניטרית (כלומר ש $U^\dagger U = I$).
הערה: באופן כללי, מטריצת המעבר בין שני בסיסים אורתוגונליים היא מטריצה אוניטרית, וההוכחה לזה מאוד דומה למה שראיתם בתרגיל בית 7, שאלה 3 סעיף ג').

ו. הראו מפורשות כי: $[T]_C = U^\dagger\, [T]_B\, U$.

ז. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם A הרמיטית ($A = A^\dagger$), וקיימת מטריצה אוניטרית U כך ש:

$$B = U^\dagger A U$$

אז גם B מטריצה הרמיטית (רמז: זכרו שבדיוק כמו transpose וכמו ההופכית, מתקיים באופן כללי כי: $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ כאשר A, B הן מטריצות כלשהן).

הערה: מהסעיף האחרון אנחנו מבינים שהמטריצה המייצגת של טרנספורמציה הרמיטית בבסיס אורתונורמלי היא הרמיטית, וגם אם נעבור לכל בסיס אחר המטריצה תשאר הרמיטית (כפי שראינו בסעיף ד'). לשם ההוגנות יש להגיד שאם נעבור לבסיס לא אורתונורמלי, אז המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה כבר לא תהיה בהכרח הרמיטית, אבל בתור פיזיקאים אנחנו כמעט תמיד נעבוד עם בסיסים אורתונורמליים גם ככה (במיוחד בהקשר של טרנספורמציות הרמיטיות), אז זה לא צריך להטריד אתכם.